

ANALYSE FONCTIONNELLE : séance 1, corrigé

ECP 3^{ème} année

Option Mathématiques appliquées

Exercice traité en cours

Question 1

Optimisation du profil d'une route

- Vérifier que C est un convexe.

...

- On choisit $\phi(y) = |y|^2$.

Montrer que pour ce choix de la fonction ϕ , la solution \bar{u} de (??) est la projection, au sens de la norme de $L^2([0, L])$, de la fonction g sur le convexe C . En déduire l'unicité de la solution.

...

- Montrer que c est un convexe fermé de l'espace de Hilbert $L^2([0, L])$.

Corr. : Soit f_n une suite de fonctions de C qui converge au sens de $L^2([0, L])$ vers une fonction f , i.e.

$$\int_0^L (f_n(x) - f(x))^2 dy \rightarrow 0$$

f_n est donc une suite de Cauchy au sens de $L^2([0, L])$, nous allons montrer que c'est une suite de Cauchy au sens de la convergence ponctuelle ce qui impliquera que sa limite est dans C .

Comme $f_n(x) - f_p(x)$ est uniformément lipschitzienne de constante 2α il suffit, pour établir le critère de Cauchy, de montrer que si une suite de fonction uniformément lipschitzienne f_n tend vers 0 au sens de $L^2([0, L])$ elle tend vers 0 ponctuellement.

On a, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $[x - h, x + h] \subset [0, L]$

$$\int_{x-h}^{x+h} (f_n(x))^2 dy \rightarrow 0$$

On a aussi

$$f_n(x) - f_n(y) \leq \alpha|x - y| \quad \text{tout comme} \quad -f_n(x) + f_n(y) \leq \alpha|x - y|$$

donc, en choisissant la première inégalité,

$$\int_{x-h}^{x+h} f_n(x) dy - \int_{x-h}^{x+h} f_n(y) dy \leq \alpha \int_{x-h}^{x+h} |x - y| dy$$

et donc

$$2hf_n(x) - \int_{x-h}^{x+h} f_n(y) dy \leq 2\alpha h^2$$

en majorant $|x - y|$ par h . Comme, d'après Cauchy-Schwartz,

$$\int_{x-h}^{x+h} f_n(y) dy \leq \sqrt{2h} \sqrt{\int_{x-h}^{x+h} f_n(y)^2 dy}$$

il vient

$$2hf_n(x) \leq \sqrt{2h} \sqrt{\int_{x-h}^{x+h} f_n(y)^2 dy} + 2\alpha h^2$$

ou encore

$$f_n(x) \leq \sqrt{\frac{1}{2h}} \sqrt{\int_{x-h}^{x+h} f_n(y)^2 dy} + \alpha h$$

En utilisant au départ la deuxième égalité, on montrerait de même

$$-f_n(x) \leq \sqrt{\frac{1}{2h}} \sqrt{\int_{x-h}^{x+h} f_n(y)^2 dy} + \alpha h$$

et donc

$$|f_n(x)| \leq \sqrt{\frac{1}{2h}} \sqrt{\int_{x-h}^{x+h} f_n(y)^2 dy} + \alpha h$$

Choissant h assez petit on peut rendre le second terme petit, en faisant tendre n vers l'infini on peut alors rendre le premier terme petit, on a donc montré que $f_n(x)$ tend vers 0.

Exercices

Question 2

Étude des espaces classiques.

Rappel :

- $c_0 = \{x_n / \lim_n x_n = 0\}$ muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$.
- $l^\infty = \{x_n / \sup_n |x_n| < +\infty\}$ muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup |x_n|$.
- $l^p = \{x_n / \sum_n |x_n|^p < \infty\}$, muni de la norme $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_n |x_n|^p}$.
- $Lipsch([0, 1])$ est l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur $[0, 1]$ muni de la norme

$$\|u\|_L = \|u\|_\infty + \sup_{x,y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

- $C^p([0, 1])$ est l'ensemble des fonctions p fois continûment dérivables sur $[0, 1]$ muni de la norme

$$\|u\|_p = \sum_{k=0}^p \|u^{(k)}\|_\infty;$$

- Montrer que $c_0, l^p, C([0, 1])$ sont séparables mais pas l^∞ .

Corr. : Soit \mathcal{E} l'espace des suites finies (i.e. nulles à partir d'un certain rang). \mathcal{E} est inclus et dense dans tous les espaces c_0, l^p : en effet au sens des normes de c_0 et l^p une suite $x = (x_n)$ est la limite des suites finies $x^k = (x_0, x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots)$. L'ensemble des suites finies à coefficients rationnels est dénombrable et dense dans \mathcal{E} pour toutes les normes considérées, il est donc dense dans c_0 et l^p (N.B. : le dernier argument est général, pour prouver la séparabilité d'un espace normé, il suffit de trouver une "suite totale", c'est à dire une suite telle que l'espace vectoriel engendré est dense. On obtient la partie dénombrable dense en considérant toutes les combinaisons rationnelles des termes de cette suite).

L'espace $C([0, 1])$ est séparable : on peut approcher uniformément toute fonction continue par une fonction continue affine par morceaux sur la partition de $[0, 1]$ en intervalles $[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}]$ (utiliser l'uniforme continuité). Ces fonctions continues affines par morceaux peuvent elles mêmes être approchées par des fonctions continues affines par morceaux de ce type à valeur rationnelle. Ces dernières forment un ensemble dénombrable.

L'espace l^∞ n'est pas séparable car il contient les suites associées aux fonction caractéristiques d'une partie quelconque de \mathbb{N} (i.e. à $A \subset \mathbb{N}$ on associe $x_A = (x_n) / x_n = 1$ si $n \in A$ et $x_n = 0$ si $n \notin \mathbb{N}$), or ces suites forment un ensemble non dénombrable et $\|x_A - x_B\|_\infty = 1$ si $A \neq B$.

- Montrer les inclusions et les résultats de densité

$$l^1 \prec l^2 \prec c_0.$$

Qu'en est-il pour l'inclusion de ces espaces dans l^∞ ?

Corr. : Pour montrer que A est dense dans B il suffit de montrer qu'une partie de A est dense dans B . Le sous espace \mathcal{E} des suites finies est dense dans c_0, l^1 et l^2 en tous les sens possibles, d'où le résultat.

Aucun de ces sous-espaces n'est dense dans l^∞ car la suite constante appartient à l^∞ et est à distance 1 de c_0, l^1 et l^2 . (N.B. On montre que ces sous-espaces bien que non denses dans l^∞ n'admettent pas de supplémentaire V fermé, i.e. tel que $l^\infty = V \oplus c_0$, c'est un exemple de situation où la dimension infinie ne se comporte pas comme la dimension finie).

- Montrer les résultats de densité

$$Lipsch([0, 1]) \prec C^0([0, 1])$$

et

$$C^2([0, 1]) \prec C^1([0, 1]) \prec C^0([0, 1]).$$

Montrer que $C^1([0, 1])$ est fermé dans $Lipsch([0, 1])$.

Corr. : On peut démontrer çà bestialement (c'est instructif car l'idée est générale) ; on approche une fonction continue par des fonctions continues affines par morceaux qui sont des fonctions de $Lipsch([0, 1])$. Pour approcher par une fonction C^1 on "arrondit les angles" des fonction continues affines par morceaux. Pour approcher une fonction $u \in C^1([0, 1])$ par une fonction C^2 on applique le résultat précédent à u' , qui peut donc être approchée par une fonction $v \in C^1([0, 1])$ et on intègre $u(0) + \int_0^x v(t) dt$ convient.

Pour le dernier résultat noter que si $u \in C^1([0, 1])$

$$\|u\|_L = \|u\|_1$$

Comme $C^1([0, 1])$ est complet pour la norme $\|u\|_1$ il l'est pour la norme $\|u\|_L$ et il est donc fermé dans $Lipsch([0, 1])$.

De nombreux résultats d'analyse comme le théorème de Stone Weierstrass ci-dessous, la convergence des séries de Fourier, la convolution avec une fonction "cloche" (cf. séance ultérieure) sont équivalents à ces résultats, en particulier si on prolonge u sur tout \mathbb{R} par 0 et on définit la suite de fonction "cloche"

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1 + n^2 x^2} \quad (1)$$

alors

$$v_n = \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x - t)u(t) dt$$

converge vers u en pour la norme $\|u\|_p$ sur tout intervalle où u est dans C^p .

– Montrer que tous ces espaces sont complets.

Corr. : cf. Polycopié de G. Teschl p. 14.

Question 3

Le théorème d'Ascoli-Arzelà

On se limite aux bornés de $Lipsch([0, 1])$.

Théorème 1 *Montrer que les parties bornées de $Lipsch([0, 1])$ sont relativement compactes pour la norme $\|u\|_{\infty}$.*

Pour la démonstration voir dans le cas un peu plus général d'un ensemble borné de fonctions équi-continues le polycopié de G. Teschl p. 34.

Rappelons que les boules dans les espaces normés de dimension infinie ne sont jamais compactes (pour la convergence associée à cette norme). Dans les espaces de Banach de fonctions, les parties compactes pour la norme sont toujours définies par des propriétés de régularité plus forte que celles que suppose la définition de la norme. La situation à éviter est celle de la suite $\sin(n\pi x)$ dans $C([0, 1])$: la non existence d'une sous-suite convergente vient des oscillations, si on interdit ces oscillations on a la compacité.

Rappel sur deux théorèmes importants d'analyse

Question 4

Le théorème du point fixe

Théorème 2 *Si (E, d) est un espace métrique complet et f une application Lipschitzienne de constante $k < 1$ (i.e. $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$) alors il existe un unique $\bar{x} \in E$ tel que $f(\bar{x}) = \bar{x}$ et pour tout $x^0 \in E$ la suite définie par la récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_0 = x^0$ converge vers \bar{x} et vérifie*

$$d(\bar{x}, x_n) \leq k^n \frac{1}{1 - k} d(x_1, x_0)$$

Corr. L'unicité est triviale. La démonstration d'existence se fait constructivement en montrant la convergence de la suite x_n , dont la limite est nécessairement un point fixe :

– On a

$$d(x_{p+1}, x_p) \leq k^p d(x_1, x_0)$$

– On montre que la suite x_n est de Cauchy : si $n \geq m$

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{p=0}^{n-m-1} d(x_{m+p+1}, x_{m+p}) \leq \sum_{p=0}^{n-m-1} k^{m+p} d(x_1, x_0)$$

d'où

$$d(x_n, x_m) \leq k^m \sum_{p=0}^{n-m-1} k^p d(x_1, x_0) = k^m \frac{1}{1-k} d(x_1, x_0)$$

Si $n, m \geq p$ on a donc

$$d(x_n, x_m) \leq k^p \frac{1}{1-k} d(x_1, x_0) \quad (2)$$

– Elle admet une limite \bar{x} puisque E est complet.

– On en déduit en faisant tendre n vers l'infini dans (2) l'estimation d'erreur

$$d(\bar{x}, x_m) \leq k^m \frac{1}{1-k} d(x_1, x_0)$$

Il existe de nombreux théorèmes de points fixes, relâchant certaines hypothèses mais supposant par exemple la compacité de l'ensemble. La force de cette version tient dans la construction d'une suite d'approximation et dans l'estimation d'erreur qui montre une convergence géométrique des approximations.

Question 5

Le théorème de Stone Weierstrass

Théorème 3 Montrer que le sous-espace $\mathbb{R}[x]$ des polynômes est dense dans $C([0, 1])$.

De nombreuses propriétés permettent de démontrer ce théorème. On en trouvera une démonstration élémentaire dans le polycopié de G. Teschl, p. 15, qui repose sur la construction par convolution d'une suite régularisante (cf. exercice 2 (1)) bien choisie

$$\phi_n(x) = \frac{1}{I_n} (1-x^2)^n \text{ si } x \in [-1, 1], \phi_n(x) = 0 \text{ sinon} \quad (3)$$

où I_n est tel que $\int_{\mathbb{R}} \phi_n(x) dx = 1$.

On peut aussi utiliser (cf. exercice 2) la densité de $C^1([0, 1])$ dans $C([0, 1])$ puis après un changement de variable $x = \sin(\theta)$ se ramener à des polynômes trigonométriques, puis à la convergence uniforme

des séries de Fourier pour une fonction C^1 .

Les polynômes de Bernstein d'une fonction continue $f(x)$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

définissent une suite de polynômes qui convergent uniformément (mais toujours lentement !) vers la fonction f . La démonstration est un peu délicate. Ces polynômes, sous le nom de polynôme de Bézier ou de courbes à pôles, sont très utilisés en CAO pour approcher des formes quelconques.

Noter que les polynômes d'interpolation $P_n(x)$ d'une fonction continue f aux points $\frac{k}{n}$, $0 \leq k \leq n$ **ne convergent pas en général** vers la fonction. Ce sont donc de mauvais polynômes d'approximation.