Séance 4 : Exercices corrigés
OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES

Objectifs

Exemples d'application du théorème de Lagrange.

Question 1

Application élémentaire
L'ensemble défini par les contraintes est un fermé borné de $\mathbb{R}^3$ donc compact, le minimum existe donc bien (mais il y a aussi un maximum). Remarquer que, si on remplace la sphère de rayon 1 par la boule de même rayon, on a un problème d'optimisation d'une fonction linéaire sur un convexe, son minimum est donc atteint sur le bord, qui est la sphère. Le problème obtenu en remplaçant la première contrainte par une inégalité a donc la même solution (de même pour le maximum) que le problème avec égalité.

• Quel est le Lagrangien de ce problème ?
Corr.
$$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = J(x) + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) + \lambda_2(x_1 + x_2 + x_3 - 1)$$

• Écrire les conditions nécessaires d'optimalité de Lagrange.
Corr. On écrit que les dérivées en x_i du Lagrangien sont nulles

$$\begin{aligned} 2 + 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 &= 0 \\ -1 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 &= 0 \\ -1 + 2\lambda_1 x_3 + \lambda_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

• Déterminer la solution de (**??**).
Corr. On détermine λ_1 et λ_2 en écrivant que les contraintes sont vérifiées :
En sommant les équations on trouve

$$0 + 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$$

et la première équation implique

$$4\lambda_1^2 = (2 + \lambda_2)^2 + (-1 + \lambda_2)^2 + (-1 + \lambda_2)^2$$

d'où

$$4\lambda_1^2 = 6 + 3\lambda_2^2$$

on en déduit $\lambda_2 = 1$ ($2\lambda_1 = -3$) ou $\lambda_2 = -1$ ($2\lambda_1 = 3$) puis $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0$ ou le point $x_1 = -1/3, x_2 = x_3 = 2/3$ avec pour valeur de la fonction objectif $J_{extr} = 2$ ou $J_{extr} = 1$.
Le minimum est nécessairement l'un des deux points (les conditions sont nécessaires). Le deuxième point est donc le le minimum (le premier est le maximum).
Le fait que le minimum est le même en remplaçant la première contrainte par une inégalité implique d'ailleurs par le théorème de Kuhn et Tucker (cf. séance 5) que $\lambda_1 \geq 0$.

Question 2

Calcul de la projection orthogonale sur un sous-espace
.... en déduire une expression de l'opérateur de projection. Ce problème d'optimisation quadratique sous contraintes linéaires est équivalent au problème

$$\left\{ \begin{array}{lll} x & +\mathbf{B}^t\Lambda & = y \\ \mathbf{B}x & & = c \end{array} \right. \tag{2}$$

on en déduit

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^t\Lambda = \mathbf{B}y - c$$

et

$$x = y - \mathbf{B}^t(\mathbf{B}\mathbf{B}^t)^{-1}(\mathbf{B}y - c)$$

ou

$$x = (Id - \mathbf{B}^t(\mathbf{B}\mathbf{B}^t)^{-1}\mathbf{B})y + \mathbf{B}^t(\mathbf{B}\mathbf{B}^t)^{-1}c$$

Question 3

Optimisation en dimension infinie
• Introduire un multiplicateur λ pour l'unique contrainte et définir le Lagrangien.
On a un problème d'optimisation quadratique convexe sous une contrainte linéaire

$$\mathcal{L}(x, \Lambda) = \int_0^1 \frac{1}{2}(x'(t)^2 + x^2(t)) + \lambda x(t)dt - \lambda$$

En déduire les conditions d'optimalité :
Corr. Rappel (séance 1) : les conditions nécessaires d'optimalité de

$$\min_x \int_0^1 f(x(t), x'(t), t)dt$$

sont les équations d'Euler

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial f}{\partial x'}) = (\frac{\partial f}{\partial x})$$

d'où ici

$$-x''(t) + x(t) = -\lambda$$

avec $x(0) = x(1) = 0$ et $\int_0^1 \ x(t)dt = 1$. La solution est cherchée sous la forme

$$x(t) = -\lambda + a\sinh(t) + b\sinh(1-t))$$

Il vient

$$a = b = \frac{\lambda}{\sinh(1)}$$

Il faut ajouter $\int_0^1 \ x(t)dt = 1$ qui détermine λ

$$(a+b)\cosh(1) = \lambda + 1$$

Cela implique $\frac{2\lambda\cosh(2)}{\sinh(1)} = 1 + \lambda$ ce qui détermine λ, inutile de finir le calcul.

Question 4

Étude d'une chaîne pesante

• Écrire ce problème comme un problème d'optimisation d'une fonction linéaire $\langle \mathbf{P}, \mathbf{U}\rangle$ sous des contraintes quadratiques d'égalité $\langle \mathbf{B}_i\mathbf{U}, \mathbf{U}\rangle = 1, \ i = 1, \ldots, n+1$, où le vecteur $\mathbf{P}$ et les matrices $\mathbf{B}_i$ sont à préciser.

Corr. Le centre de gravité d'une barre est un point d'ordonnée

$$\frac{1}{2}(y_i + y_{i-1})$$

Toutes les barres ont la même masse, donc le centre de gravité du système est un point d'ordonnée

$$y_G = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{2}(y_i + y_{i-1})$$

on en déduit, en tenant compte de $y_0 = y_{n+1} = 0$,

$$y_G = \langle \mathbf{P}, \mathbf{U}\rangle$$

avec

$$\mathbf{P} = \frac{1}{n+1}(0, 1, ..., 0, 1, ..., 0, 1)^t$$

Il faut écrire que toutes les barres gardent la longueur L, i.e.

$$\frac{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}{L^2} = 1$$

ou encore matriciellement

$$\langle \mathbf{B}_i\mathbf{U}, \mathbf{U}\rangle = 1, \ i = 1, \ldots, n+1$$

avec pour matrice $\mathbf{B}_i$

$$\mathbf{B}_i = \frac{1}{L^2}\begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 1 & 0 & -1 & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & 1 & 0 & -1 & \ldots \\ \ldots & -1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & -1 & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \tag{3}$$

les éléments non nuls sont d'indices $2(i-2)+1$ à $2i$,(on adapte pour $i=1$ et $i=n+1$).
• Écrire le Lagrangien et les conditions d'optimalité en appliquant le théorème de Lagrange.
On a

$$\mathcal{L}(\mathbf{U},\mathbf{\Lambda}) = \langle \mathbf{P},\mathbf{U}\rangle + \sum_i \lambda_i(\langle \mathbf{B}_i\mathbf{U},\mathbf{U}\rangle - 1)$$

ou encore

$$\mathcal{L}(\mathbf{U},\mathbf{\Lambda}) = \langle \mathbf{P},\mathbf{U}\rangle + (\langle \mathbf{A}\mathbf{U},\mathbf{U}\rangle - 1)$$

où l'on a posé

$$\mathbf{A} = \sum_i \lambda_i \mathbf{B}_i$$

Le lagrangien est une fonction quadratique par rapport à $\mathbf{U}$, son gradient à été calculé à la séance 1

$$\nabla_{\mathbf{U}}\mathcal{L}(\mathbf{U},\mathbf{\Lambda}) = \mathbf{P} + 2\mathbf{A}\mathbf{U}$$

Les conditions d'optimalité découlant du théorème de Lagrange sont

$$2(\sum_i \lambda_i \mathbf{B}_i)\mathbf{U} = -\mathbf{P} \tag{4}$$

$$\langle \mathbf{B}_i\mathbf{U},\mathbf{U}\rangle = 1,\ i = 1,\ldots,n+1 \tag{5}$$

• Comment calcule-t-on la solution du problème primal, i.e. le minimum du Lagrangien par rapport à U ?
Il suffit de résoudre un système linéaire de matrice $\mathbf{A}$ mais ce système linéaire a une matrice qui dépend des multiplicateurs ; il faudra donc, si on le résout par la méthode de Gauss, retrianguler la matrice à chaque modification des multiplicateurs.
• Appliquer l'algorithme d'Uzawa à ce problème.

Choisir une estimation de Λ^0 et de $\rho > 0$ (assez petit),
`Faire :`
    $\mathbf{A} = \sum_i \lambda_i \mathbf{B}_i$
    Soit $\mathbf{U}^k$ solution du problème primal :
    $2\mathbf{A}\ \mathbf{U}^k = -\mathbf{P}$
    $F_k = \mathcal{L}(\mathbf{U}^k, \Lambda^k)$
    Tester $F_k > F_{k-1}$ sinon diminuer ρ
    $g_i^k = \langle \mathbf{B}_i\mathbf{U},\mathbf{U}\rangle - 1$
    $\Lambda^{k+1} = \Lambda^k + \rho g^k$
`Tant que` $\|g^k\| \geq eps\|g^0\|$