

Analyse, séance 2 : corrigé des exercices
 RÉOLUTION ANALYTIQUE DE PROBLÈMES CANONIQUES
 Application à l'étude des singularités au bord

Question 1

...

Montrer que $a_k(r)$ est solution d'une équation différentielle du second ordre

$$\frac{1}{r}(ra'_k)' - \frac{k^2\pi^2}{\alpha^2} \frac{a_k}{r^2} = 0$$

Corr. :

Le laplacien en coordonnées polaires s'écrit :

$$\Delta u = \frac{1}{r}(ru')' + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

En remplaçant u par le développement en série de Fourier et en identifiant terme à terme on obtient l'équation demandée.

- Montrer que la fonction

$$a_k(r) = a_k r^{\frac{k\pi}{\alpha}}$$

où a_k est une constante, est une solution de cette équation nulle en 0.

Corr. :

Montrons que l'équation différentielle admet des solutions particulières en r^β , qui doivent vérifier

$$\frac{1}{r}(r\beta r^{\beta-1})' - \frac{k^2\pi^2}{\alpha^2} r^{\beta-2} = 0$$

ou encore

$$\beta^2 r^{\beta-2} - \frac{k^2\pi^2}{\alpha^2} r^{\beta-2} = 0$$

Il faut donc que

$$\beta = \pm \frac{k\pi}{\alpha}$$

On obtient une solution nulle en 0 de l'équation différentielle en prenant le signe +

$$a_k(r) = a_k r^{\beta_k}, \text{ avec } \beta_k = \frac{k\pi}{\alpha}$$

• En utilisant la condition $u(1, \theta) = g(\theta)$, calculer a_k en fonction de g et en déduire une expression de la solution du problème de Laplace (nous avons montré en cours l'unicité de la solution si $\int_{\Omega} \|\mathbf{Grad} u\|_2^2 d\Omega$ est finie).

Corr. :

En reportant le résultat précédent dans le développement en série de Fourier, on obtient une solution de l'équation de Laplace, nulle sur les bords du "coin".

$$u(r, \theta) = \sum_k a_k r^{\beta_k} \sin \frac{k\pi\theta}{\alpha}$$

Les coefficients a_k sont déterminés par la condition sur le cercle $u(1, \theta) = g(\theta)$, ils sont donc les coefficients d'un développement de $g(\theta)$ en série de fonctions sinus, qui, à un changement de variable près, est un développement de Fourier. On peut faire le changement de variable ou noter que les fonctions $v_k(\theta) = \sin \frac{k\pi\theta}{\alpha}$ pour deux entiers k distincts sont orthogonales pour le produit scalaire $\int_0^\alpha uv dx$, on en déduit

$$a_k = \frac{\int_0^\alpha g(\theta) \sin \frac{k\pi\theta}{\alpha} d\theta}{\int_0^\alpha \left(\sin \frac{k\pi\theta}{\alpha}\right)^2 d\theta}$$

avec

$$\int_0^\alpha \left(\sin \frac{k\pi\theta}{\alpha}\right)^2 d\theta = \frac{\alpha}{2}$$

On peut en déduire une expression intégrale de la solution en calculant la somme de la série comme nous l'avons fait en cours pour obtenir le noyau de Poisson.

• On suppose ici que $\alpha > \pi$. Montrer la proposition :

Proposition 1 *La pointe d'un coin rentrant est un point singulier de la solution générale de l'équation de Laplace, i.e. le gradient de la solution tend vers l'infini en ce point.*

Corr. :

Le gradient en coordonnées polaires est

$$\mathbf{Grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)_t$$

Si $\alpha < \pi$ on $\beta_k > 1$ pour tout k , donc tous les termes du développement en séries de Fourier sont de gradient borné. Si $\pi < \alpha < 2\pi$ on a $\frac{1}{2} < \beta_1 < 1$, les autres β_k étant supérieurs à 1. Le premier terme du développement a donc un gradient de norme proportionnelle à r^{β_1-1} qui tend donc vers l'infini en 0. Le reste de la série a un gradient borné et nul en 0.

• Vérifier que la singularité est maximale et en $\frac{1}{\sqrt{r}}$ dans le cas d'un domaine fissuré ($\alpha = 2\pi$).

Corr. :

La valeur minimale de β_1 est $\frac{1}{2}$ pour $\alpha = 2\pi$. Ce qui correspond à une singularité en $\frac{1}{\sqrt{r}}$ pour un fond de fissure. Dans le cas où l'équation de Laplace est celle du potentiel, cette situation serait "l'effet de pointe" dû à un pointe conductrice (\rightarrow potentiel nul) dans un espace homogène¹ : le champ électrique

¹On considère en fait une situation où le problème soit bidimensionnel : plutôt qu'une pointe on a un mur et on étudie le problème sur une coupe 2D. C'est donc le cas d'une arête rocheuse en haut d'une montagne, à éviter par temps d'orage !

est infini sur la pointe et asymptotiquement en $\frac{1}{\sqrt{r}}$ où r est la distance au sommet de la pointe. On montre que l'on a un résultat équivalent pour les équations de l'élasticité : les contraintes et les déformations sont infinies dans un coin rentrant ou au fond d'une fissure et leur intensité croît en $\frac{1}{\sqrt{r}}$ au voisinage du fond de la fissure.

Question 2

On considère comme dans la question 1 le problème de Laplace. On suppose que Ω est le demi plan défini par

$$\Omega = \{(x, y) / x \geq 0, \quad -\infty \leq y \leq \infty\}$$

Soit $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ une fonction continue et intégrable sur l'axe des ordonnées $x = 0$. On cherche un fonction u , harmonique sur Ω , nulle à l'infini, égale à g sur l'axe des ordonnées et on fera les hypothèses nécessaires pour préciser cette condition.

- Soit

$$v(x, z) = \mathcal{F}_y(u(x, y))(z)$$

la transformée de Fourier de u considérée comme une fonction de y (on suppose donc que $\forall x, u(x, y) \in L^1(\mathbb{R})$, ce que l'on vérifiera a posteriori). Montrer que v est solution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - z^2 v = 0 \quad (1)$$

Corr.

Par dérivation sous le signe intégral

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}_y(u(x, y))(z)}{\partial x^2} = \mathcal{F}_y \left(\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \right) (z)$$

Rappelons la formule (conséquence d'une intégration par parties, voir poly Chap 3)

$$\mathcal{F}_y \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) (z) = -iz \mathcal{F}_y (u(x, y)) (z)$$

D'où

$$-z^2 \mathcal{F}_y(z^2 u(x, y))(z) = \mathcal{F}_y \left(\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right) (z)$$

D'où

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - z^2 v = \mathcal{F}_y (\Delta u(x, y)) (z) = 0$$

- En remarquant que $v(0, z) = \mathcal{F}_y(g(y))(z)$ montrer que

$$v(x, z) = \mathcal{F}_y(g(y))(z) \exp(-|z|x)$$

Corr.

Rappelons la définition du produit de convolution $f * g$ de deux fonction $f, v \in L^1(\mathbb{R})$ (cf. Analyse 1)

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt$$

$v(x, z)$ est, à z fixé, solution d'une équation différentielle du second ordre dont la seule solution nulle à l'infini est

$$v(x, z) = v(0, z) \exp(-|x|z)$$

- En déduire² l'expression suivante de la solution

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \frac{x}{x^2 + (y-t)^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y-t) \frac{x}{x^2 + (t)^2} dt$$

Corr.

Comme tenu de la formule (chap. 3 p. 56)

$$\text{Si } u, v \in L^1(\mathbb{R}) \quad \mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}(u)\mathcal{F}(v)$$

il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_y(u(x, y))(z) = v(x, z) &= v(0, z) \exp(-|x|z) \\ &= \mathcal{F}_y(g(y))(z) \mathcal{F}_y\left(\frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}\right)(z) \\ &= \mathcal{F}_y\left(g(y) * \left(\frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}\right)\right)(z) \end{aligned} \quad (2)$$

où nous avons souligné que le produit de convolution est celui de deux fonctions de y . Par l'injectivité de la transformée de Fourier, il vient

$$u(x, y) = g * \left(\frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \frac{x}{x^2 + (y-t)^2} dt$$

- On suppose $g \in C^1(\mathbb{R} - \{0\})$ et que $g'(0^+)$ et $g'(0^-)$ existent. Montrer que

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\infty} g(t) \frac{(y-t)^2 - x^2}{(x^2 + (y-t)^2)^2} dt$$

puis en décomposant l'intégrale sur \mathbb{R}^+ et \mathbb{R}^- , montrer que

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g'(t) \frac{x-t}{x^2 + (x-t)^2} dt$$

et finalement

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} -g''(t) \ln \sqrt{x^2 + (y-t)^2} dt + \frac{1}{\pi} (g'(0^-) - g'(0^+)) \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

En déduire la proposition

²On admettra (cf. analyse 1)) que

$$\mathcal{F}_y\left(\frac{1}{\pi} \frac{z}{z^2 + y^2}\right)(x) = \exp(-|z|x)$$

Proposition 2 *Un point du bord où g' admet une discontinuité de première espèce est un point singulier de la solution de l'équation de Laplace, i.e. le gradient de la solution tend vers l'infini en ce point avec une vitesse logarithmique.*

Corr.

N.B. : toutes les dérivations que nous effectuons ci-dessous ainsi que les passages à la limite se justifient sans difficulté en utilisant les théorèmes vus en première année à propos de l'intégrale de Lebesgue dès lors que g est une fonction à décroissance assez rapide à l'infini (i.e. $g(y)$ et ses premières dérivées convergent vers 0 plus vite que $\frac{1}{y^2}$).

On dérive la formule (3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + (y-t)^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \frac{(y-t)^2 - x^2}{(x^2 + (y-t)^2)^2} dt\end{aligned}\quad (3)$$

Noter d'abord que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

donc, en dérivant une fonction composée

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{y-t}{x^2 + (y-t)^2} \right) = -\frac{x^2 - (y-t)^2}{(x^2 + (y-t)^2)^2}$$

On intègre par partie (3) pour faire apparaître g' , mais comme g n'est pas dérivable en 0 on prend la précaution de découper en \mathbb{R}^+ et \mathbb{R}^- , les crochets disparaissent (à l'infini car g y est nulle et en 0 par continuité), d'où la formule après recombinaison des deux morceaux

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \frac{(y-t)^2 - x^2}{(x^2 + (y-t)^2)^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g'(t) \frac{y-t}{x^2 + (y-t)^2} dt$$

On intègre une deuxième fois par parties toujours sur \mathbb{R}^+ et \mathbb{R}^- . Cette fois on note que

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

et donc que

$$\frac{y-t}{x^2 + (y-t)^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \ln \sqrt{x^2 + (y-t)^2}$$

Mais les crochets ne s'annulent pas en 0, il reste, après recombinaison de l'intégrale sur \mathbb{R}

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g'(t) \frac{y-t}{x^2 + (y-t)^2} dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^0 g''(t) \ln \sqrt{x^2 + (y-t)^2} dt + g'(0^-) (-\ln \sqrt{x^2 + y^2}) + \int_0^{+\infty} g''(t) \ln \sqrt{x^2 + (y-t)^2} dt \right)$$

d'où le résultat.

Quand x, y tendent vers 0, l'intégrale reste convergente, car $\ln |t|$ est intégrable. Elle tend vers

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} -g''(t) \ln |t| dt$$

On en déduit que $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$ a un comportement logarithmique autour de $(0, 0)$: une simple discontinuité de la dérivée d'une donnée au bord implique une singularité de la dérivée normale de la solution au voisinage de ce point. Ajouté au résultat de la question précédente ce résultat montre qu'il faut s'attendre à voir beaucoup de singularités au bord. Il faudrait y ajouter les singularités (logarithmiques) au voisinage des points où le bord rencontre une ligne de discontinuité des coefficients de l'équation et les singularités aux points du bord où on a un changement de conditions aux limites. Toutes ces singularités apparaissent nettement lors d'un calcul à l'aide de Femlab si on utilise l'option de calcul "adaptative" qui raffine le maillage là où c'est nécessaire.

Question 3

Fonctions propres du Laplacien dans un disque

On veut déterminer les fonctions propres du laplacien opérant sur les fonction nulles sur le bord d'un disque Ω de rayon 1...

Voir le polycopié chapitre 3 p.62