

# MATHÉMATIQUES 2

## Organisation du cours

### Responsable

Pascal Laurent

### Équipe enseignante :

Boussad Mammeri (ECP), Maxime Barrault (EDF), Xavier Core (EDF), Olivier Dubois (EDF), Patrick Erhard (EDF), Pascal Joly (Paris VI), Damien Lucas (Computing Objects), Arnaud Picard (EDF), Jacques-Hervé Saiac(CNAM), Thu-Sanh Tran (EDF).

### Contacts

*Web* : [www.etudes.ecp.fr/](http://www.etudes.ecp.fr/)

*Bur* : Bat. Ens., S 115 *Tel* : 01 41 13 11 55,

*Email* : [pascal.laurent@ecp.fr](mailto:pascal.laurent@ecp.fr)

*Secrétariat* : bur. E 106, Tel. 01 41 13 12 61.

*Réception des étudiants* : envoyer un mail.

### Divisions du cours

Le cours est en trois parties, dont le programme est détaillé à la fin du document :

- Optimisation (5 séances).
- Analyse et simulation des équations aux dérivées partielles (9 séances).
- Théorie des graphes et optimisation discrète (5 séances).

### Organisation des séances

Les séances peuvent être composées soit d'un cours en amphithéâtre et de travaux dirigés en petites classes, soit d'un cours et de travaux dirigés tous deux en petites classes. Voir l'emploi du temps ci-dessous pour les détails. **Il faudra s'inscrire dans une petite classe à la première séance.** Pour les élèves qui le souhaitent quelques séances supplémentaires seront organisées, hors emploi du temps, pour préciser certaines définitions ou faire quelques rappels, voir le site du cours.

## Documents

Le cours est entièrement couvert par les documents distribués. Les supports de cours sont :

- Le polycopié “Optimisation”.
- Le polycopié “Analyse des équations aux dérivées partielles” et le polycopié d’exercices qui l’accompagne .
- Le polycopié “Graphes et Optimisation discrète : Cours et exercices”.
- Les corrigés des exercices, distribués après chaque séance.

## Outils logiciels

Vous disposerez au CTI du logiciel “Comsol”. Pour acquérir une expérience pratique vous trouverez sur le site du cours des outils de simulation développés en “Scilab”. Vous aurez deux TP sur Comsol au mois de décembre qui auront lieu en PC.

## Contrôles

Il y a deux contrôles facultatifs<sup>1</sup> et le contrôle final.

- Les deux bureaux d’études auront une durée de 1 h 30, **sans document**, la note finale de contrôle facultatif aura un coefficient 0, 4. Ils sont situés à la fin du cours d’optimisation et à la fin du cours d’analyse.
- Un contrôle écrit, **une heure sans document**, deux heures avec tous documents, avec un coefficient de 0, 6.

## Objectifs du cours

### Les objectifs directs du cours

L’objectif du cours est d’apprendre à utiliser les mathématiques avec une démarche d’ingénieur qui doit analyser, modéliser, simuler, optimiser des systèmes complexes :

- Le cours “Optimisation” est une introduction aux méthodes de l’optimisation de fonctions de variables réelles qui sera l’occasion de se familiariser avec des notions utilisées dans les deux autres parties cours : le calcul différentiel, la convexité et la dualité.
- Le cours “Analyse 2” présente les bases mathématiques de l’analyse et de l’approximation des phénomènes régis par des équations aux dérivées partielles (mécanique des milieux continus, électromagnétisme, mathématiques financières...).
- Le cours “Graphes et optimisation discrète”, d’un esprit différent des deux autres cours, est une introduction aux mathématiques de la gestion (gestion de production, logistique...).

### Le contexte

La simulation est un des grands enjeux industriels d’aujourd’hui car elle raccourcit la durée de conception et diminue les coûts d’étude. Vous avez certainement vu des simulations sur ordinateur du

---

<sup>1</sup>appelés aussi “bureaux d’études”.

comportement d'une voiture, d'un avion ou d'un écoulement...

Il ne faut jamais oublier que cette "réalité virtuelle" n'est qu'une réalisation informatique d'un modèle mathématique qu'il faut maîtriser et qui a des limites. Ces simulations sont réalisées avec des logiciels qui ne sont pas des jeux vidéos, leur utilisation demande des connaissances approfondies des modèles physiques, des méthodes d'approximation et des compétences sur la modélisation d'un problème pour permettre sa simulation.

Les principes mathématiques et les méthodes numériques que nous étudierons servent bien sûr à la conception de ces logiciels, mais ils sont surtout nécessaires pour modéliser les systèmes à simuler ou à optimiser, pour maîtriser ces modèles et donc pour utiliser ces logiciels.

### Les objectifs indirects du cours

Dans une formation d'ingénieur généraliste les mathématiques ne doivent pas être considérées comme un point de vue a priori à appliquer à une réalité expérimentale, mais comme un moyen de se servir de la connaissance expérimentale d'un problème particulier pour comprendre d'autres problèmes. Ce qui fait ensuite mieux comprendre les spécificités de chaque problème et permet de passer rapidement d'un domaine à un autre. Le moyen pour y parvenir est bien sûr une certaine abstraction, qui permet un langage commun entre des situations diverses, mais aussi l'étude des méthodes de calcul car le même algorithme peut servir, par exemple, dans des problèmes de gestion, d'électronique, de calcul de structures ou de dynamique multicorps. La simulation numérique met en évidence l'unité profonde de différents domaines scientifiques par l'universalité des outils qu'elle utilise.

### Principaux points du cours

**Optimisation** Les outils mathématiques sont classiques mais il faut de bonnes bases d'algèbre linéaire. Calcul d'une différentielle. Fonctions convexes. Applications à l'étude des systèmes non linéaires et au "calcul des variations". Méthode d'optimisation par descente. Notion de conditionnement. Théorème et multiplicateurs de Lagrange. L'optimisation sous contraintes d'inégalité n'est pas au programme.

**Analyse des EDP** C'est la partie la plus difficile du cours : parce qu'elle est très riche<sup>2</sup> (elle contient toute la physique mathématique) et parce qu'il y a beaucoup de prérequis.

- *Il n'y a pas de "théorie générale des équations aux dérivées partielles"* : si c'était le cas elle vous serait bien sûr enseignée et vous comprendriez tout sur la mécanique du solide et des fluides, la théorie des ondes, la mécanique quantique... .
- Dans le cours et dans les exercices, pour des raisons pédagogiques évidentes, c'est à *partir d'exemples* que nous introduisons de façon progressive quelques idées pour l'étude des équations aux dérivées partielles et de leur approximation numérique.
- *Devant un problème complexe nous nous limitons donc à quelques idées simples*. Mais il apparaîtra clairement que ces idées s'étendent à toute une classe de problèmes. Le *polycopié développe une approche plus synthétique*, mais plus abstraite. Les deux approches sont donc complémentaires.

---

<sup>2</sup>La théorie des équations aux dérivées partielles représente peut être un tiers des publications mathématiques...

1. Pour les problèmes stationnaires : l'équation de Poisson avec conditions de Dirichlet homogène ( $-k\Delta u = f$ ,  $u|_{\Gamma} = 0$ ). Introduction de conditions aux limites générales sur l'exemple de l'équation de la diffusion ( $k\frac{\partial u}{\partial n} = c(u - u_0)$ ). Introduction de termes non différentiels ( $-k\Delta u + cu = f$ ). Introduction de non linéarités ( $-k\Delta u + cu^3 = f$ ). Les principaux concepts pour la compréhension de ces problèmes sont : les formulations faibles et les principes énergétiques, et pour l'approximation de ces problèmes : le principe de Ritz-Galerkin, la méthode des éléments finis, le programme d'assemblage.
2. Pour les problèmes d'évolution : équation de la diffusion, étude de la stabilité. Equation hyperbolique du premier ordre, équation des ondes. Étude de la stabilité. Schémas simples aux différences finies et étude de leur stabilité. Les principaux concepts pour la compréhension de ces problèmes sont : les principes énergétiques de conservation ou de dissipation, l'utilisation des caractéristiques, la notion de vitesse de propagation.

Enfin les deux TP sur Comsol donne une approche concrète de quelques problèmes : modélisation de problèmes physiques, raffinement de maillage, effet des singularités au bord, stabilité des schémas. Rappelons que vous avez accès au logiciel Comsol sur tout le campus (voir le site du cours).

**Optimisation discrète** Il n'y a pas de grandes difficultés mathématiques mais beaucoup d'algorithmes. Principales définitions sur les graphes. Problèmes de flots et d'affectation : algorithme de Ford Fullkerson. Programmation linéaire : algorithme du simplexe. Théorie de la complexité : représentation d'un problème dans un autre.

## Emploi du temps

### Optimisation

Séq	Jour	Date	Heure	Lieu
1	Mercredi	19 Septembre	8 h	Cours en AMPHI, exercices en PC.
2	Lundi	24 Septembre	14 h	Cours et exercices en PC.
3	Mercredi	26 Septembre	8 h	Cours et exercices en PC.
4	Lundi	1 Octobre	14 h	Cours en AMPHI, exercices en PC.
5	Lundi	8 Octobre	14 h	Exercices en PC et B.E. en PC.

**Analyse et approximation des équations aux dérivées partielles**

Séq	Jour	Date	Heure	Lieu
1	Lundi	15 Octobre	14 h	Cours en AMPHI, exercices en PC.
2	Lundi	22 Octobre	14 h	Cours en AMPHI, exercices en PC.
3	Lundi	12 Novembre	14 h	Cours et exercices en PC.
4	Lundi	19 Novembre	14 h	Cours et exercices en PC.
5	Lundi	26 Novembre	14 h	Cours et exercices en PC.
6	Vendredi	30 Novembre	14 h	Cours et exercices en PC.
7	Lundi	3 Décembre	14 h	Cours et exercices en PC.
8	Vendredi	14 Décembre	14 h	Cours et exercices en PC.
9	Lundi	17 Décembre	14 h	Exercices et B.E. en PC

**Graphes et optimisation discrète**

Séq	Jour	Date	Heure	Lieu
1	Vendredi	21 Décembre	14 h	Cours en AMPHI, exercices en PC.
2	Vendredi	11 Janvier	14 h	Cours et exercices en PC.
3	Lundi	14 Janvier	14 h	Cours et exercices en PC.
4	Mercredi	16 Janvier	14 h	Cours et exercices en PC.
5	Lundi	21 Janvier	14 h	Cours et exercices en AMPHI.

## Programme des séances

Les numéros des séances sont ceux figurant dans les photocopies.

### Optimisation

1. Rappel de calcul différentiel. (Amphi + PC)  
Cours : Différentielle d'une application (dans le contexte des espaces vectoriels normés) Différentielle au sens de Gâteaux d'une fonction, dimension finie et infinie ; gradient, conditions d'optimalité.  
TD : Calcul de différentielles, cas non quadratique, application à l'étude de systèmes non linéaires.
2. Convexité. (2 PC)  
Cours : Fonctions convexes, critères de convexité, quelques théorèmes classiques, exemples.  
TD : Exemples, application à l'étude de système non linéaires, exemples en dimension infinie.
3. L'optimisation locale. (2 PC)  
Cours : L'optimisation des fonctions convexes. Méthodes de descente, optimisation 1D, algorithme de gradient et de relaxation. Méthode de Newton.  
TD : La méthode du gradient, préconditionnement.
4. L'optimisation sous contraintes. (Amphi + PC)  
Cours : Cas  $C^1$  et contraintes d'égalité : multiplicateurs et théorème de Lagrange ; cas convexe, contrainte linéaires. Interprétation des multiplicateurs, dualité.  
TD : Exemples "à la main" en dimension finie et infinie. Méthodes de dualité. Méthodes de pénalisation.
5. L'optimisation sous contraintes. (2 PC)  
TD : Exercices d'introduction au cours d'analyse.  
Bureau d'études (1 h 30).

### Analyse et approximation des équations aux dérivées partielles

1. Présentation (Amphi + PC)  
Cours : Introduction aux équations aux dérivées partielles, l'équation de Poisson.  
TD : Les équations canoniques : Équations de la diffusion et des ondes.
2. Méthodes classiques d'étude des EDP (Amphi + PC)  
Cours : Présentation du contexte de la simulation.  
TD : Quelques méthodes classiques en EDP.
3. Analyse d'un problème aux limites (2 PC)  
TD : Analyse et approximation d'un problème différentiel aux limites.  
Cours : Le problème de Poisson : analyse.
4. Problème de Poisson. Première présentation de la méthode des éléments finis. (2 PC)  
Cours : Approximation du problème de Poisson.  
TD : Etude du modèle numérique, introduction à la méthode des éléments finis.
5. Les problèmes elliptiques. (2 PC)  
Cours : Calcul des variations, les problèmes non linéaires, l'élasticité.  
TD : Exemples classiques. Problèmes non linéaires.
6. Les problèmes dynamiques : cas parabolique. (2 PC)  
Cours : introduction aux problèmes dynamiques à partir d'un problème de finance.  
TD : Approximation de l'équation de la diffusion, stabilité et consistance.
7. Les problèmes dynamiques hyperboliques. (2 PC)  
Cours : Equation d'advection, notion de caractéristique, système hyperbolique linéaire à coefficients

constants.

TD : Approximation numérique, utilisation des caractéristiques, condition CFL.

8. TP sur Comsol. (2 PC)

9. L'équation de Burgers (2 PC)

Cours : Cas hyperbolique non linéaire. Les chocs, exemple de l'équation de Burgers.

Bureau d'étude (1 h 30)

### Graphes et optimisation discrète

1. Introduction à la théorie des graphes et à l'optimisation discrète. (Amphi + PC)

Cours : Notions élémentaires sur la théorie des graphes, quelques problèmes classiques.

TD : Problèmes classiques sur les circuits, le coloriage. Circuits hamiltonien. Graphe planaire.

2. Problème de flot, du voyageur de commerce et d'ordonnancement ( 2 PC)

Cours : Les problèmes de flots et d'affectation, lien avec la programmation linéaire, problèmes classiques d'ordonnancement.

TD : Ford Fulkerson, PERT

3. La programmation linéaire. ( 2 PC)

Cours : Modélisation et exemples.

TD : Exercices de modélisation, la méthode du simplexe illustrée .

4. La programmation linéaire. (2 PC)

Cours : Problèmes se ramenant au problème canonique ; algorithme de Dantzig.

TD : Exemples, cas particuliers.

5. Notion de complexité et de problèmes NP-complets (2 PC)

Cours : Théorie de la complexité des algorithmes, problèmes polynomiaux, problèmes NP ; théorème de Cook. Problèmes NP-complets. Notion d'heuristiques.

TD : Complexité de quelques algorithmes, exemples de problèmes NP-complets.